1. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

1.1. Основные определения

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и ее производные $y', y'',..., y^{(n)}$. Обыкновенное дифференциальное уравнение может быть записано в виде

$$F\left(x, y, y', y'',..., y^{(n)}\right) = 0 .$$

Наряду с обыкновенными дифференциальными уравнениями в теории дифференциальных уравнений изучаются также уравнения в частных производных, представляющие собой соотношения, связывающие функцию многих переменных, сами переменные и частные производные от указанной функции. В дальнейшем будут рассматриваться только обыкновенные дифференциальные уравнения, и характеристика «обыкновенные» иногда опускается.

Порядком обыкновенного дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение. Так, например, уравнение $y' - 2xy^2 + 5 = 0$ является *уравнением первого порядка*. Уравнение $y'' + ky' - by - \sin x = 0$ является *уравнением второго порядка* и т. д.

1.2. Дифференциальные уравнения первого порядка

Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка является уравнение вида

$$F\left(x, y, y'\right) = 0 ,$$

связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и ее первую производную y'.

Пусть $f(x, y)$ — непрерывная функция, заданная в области G плоскости Oxy (*областью* называется связное открытое множество). Предположение непрерывности $f(x, y)$ считается в дальнейшем выполненным и специально не оговаривается.

Уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f\left(x, y(x)\right) \qquad (1.1)$$

называется *дифференциальным уравнением первого порядка*, разрешенным относительно производной, или уравнением в нормальной форме.

Пример 1.1. Различные формы записи дифференциальных уравнений первого порядка

Рассмотрим уравнения

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2y\frac{dy}{dx} - y^2\left(e^{2x} - 1\right) = 0;$$

$$xdy + (y - \cos x)dx = 0;$$

$$y' + 2y = e^x.$$

Те же уравнения, записанные в нормальной форме, имеют вид

$$\frac{dy}{dx} = y\left(1 \pm e^x\right) \text{ или } y' = y\left(1 \pm e^x\right);$$

$$y' = \frac{1}{x}(\cos x - y);$$

$$y' = e^x - 2y.$$

Рассмотрим связное множество на вещественной оси, т. е. промежуток вида $\langle a,b \rangle$, где знак $\langle$ или $\rangle$ может обозначать как включение ([или]), так и исключение ((или)) конца промежутка. При этом в последнем случае a и b могут быть несобственными числами ($a = -\infty$, $b = +\infty$).

Функция $y = \varphi(x)$, определенная на промежутке $\langle a,b \rangle$, называется *решением дифференциального уравнения* (1.1), если выполняются следующие условия:

- $\varphi(x)$ дифференцируема во всех точках $\langle a,b \rangle$ (если $\langle a,b \rangle$ содержит левый или правый конец, то существует, соответственно, левосторонняя или правосторонняя производная);
- $(x, \varphi(x)) \in G$ при всех $x \in \langle a,b \rangle$;
- $\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$ при всех $x \in \langle a,b \rangle$.

Из определения решения и непрерывности $f(x,y)$ следует, что $\varphi'(x)$ непрерывна на $\langle a,b \rangle$. Существенно, что областью определения решения является связное множество. Например, при каждом вещественном C функция $\varphi(x) = \dfrac{1}{C-x}$, определенная при всех $x \neq C$, не является решением дифференциального уравнения $y' = y^2$ (здесь область G — вся плоскость Oxy), так как она задана на несвязном множестве. Вместе с тем сужения функции $\varphi(x)$ на интервалы $(-\infty, C)$ и $(C, +\infty)$ являются решениями указанного уравнения.

Из рассмотренного примера видно, что дифференциальное уравнение может иметь бесконечное множество решений, поэтому, когда необходимо получить конкретное решение дифференциального уравнения, ставят дополнительные условия, выделяющие его из множества всех решений этого уравнения. Для уравнения (1.1) таким условием является начальное условие

$$\varphi(x_0) = y_0, \quad (x_0, y_0) \in G. \tag{1.2}$$

Числа x_0, y_0 называются *начальными данными*, а задача отыскания решения, удовлетворяющего начальному условию (1.2), — *задачей Коши*, или начальной задачей. Решение задачи Коши называется *частным решением* уравнения (1.1).

Приведем без доказательства теорему существования решения задачи Коши (см., например, [2, гл. 1, § 2]).

Решение задачи Коши для уравнения (1.1) с начальными данными $(x_0, y_0) \in G$ существует.

Кривая, являющаяся графиком некоторого решения дифференциального уравнения, называется *интегральной кривой*. Сопоставим каждой точке $(x_0, y_0) \in G$ прямую с угловым коэффициентом $k = f(x_0, y_0)$, проходящую через эту точку. Получившуюся картину назовем *полем направлений*, соответствующим дифференциальному уравнению (1.1), а каждую из прямых — направлением поля в соответствующей точке. Из определения интегральной кривой следует, что кривая, лежащая в области G, является интегральной кривой тогда и только тогда, когда она гладкая и касательная в каждой ее точке совпадает с направлением поля в данной точке. Этот вывод может быть использован для приближенного построения интегральных кривых.

Пример 1.2. Интегральные кривые и графики решений дифференциальных уравнений

На рис. 1.1 изображена интегральная кривая — график решения дифференциального уравнения $xdy + (y - \cos x)dx = 0$ проходящего через точку с координатами $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{2}{\pi}\right)$.

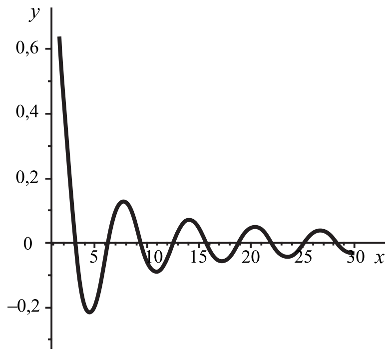

Рис. 1.1. Интегральная кривая дифференциального уравнения $xdy + (y - \cos x)dx = 0$

Пример 1.3. Поле направлений

На рис. 1.2 показано поле направлений дифференциального уравнения $xdy + (y - \cos x)dx = 0$.

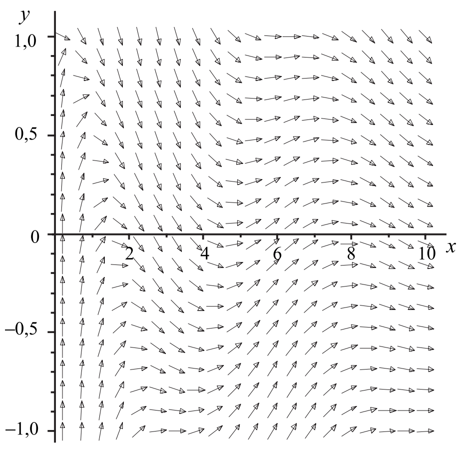

Рис. 1.2. Поле направлений дифференциального уравнения $xdy + (y - \cos x)dx = 0$

Будем говорить, что область $A \subset G$ есть *область единственности* для уравнения (1.1), если два любых решения уравнения (1.1), графики которых принадлежат A, определенные на промежутке $\langle a,b \rangle$ и совпадающие при некотором $x_0 \in \langle a,b \rangle$, совпадают на всем $\langle a,b \rangle$.

Пример 1.4. Нарушение единственности решения задачи Коши

Рассмотрим уравнение

$$y' = 3y^{2/3},$$

где G — вся плоскость Oxy. При каждом C функция $y = (x + C)^3$ является решением этого уравнения на интервале $(-\infty, +\infty)$. Кроме указанного семейства решений уравнение имеет решение $y = 0$. Следовательно, ось x состоит из точек, через которые проходит более чем одна интегральная кривая (рис. 1.3), т. е. G не является областью единственности. Однако полуплоскости $y > 0$ и $y < 0$ — области единственности.

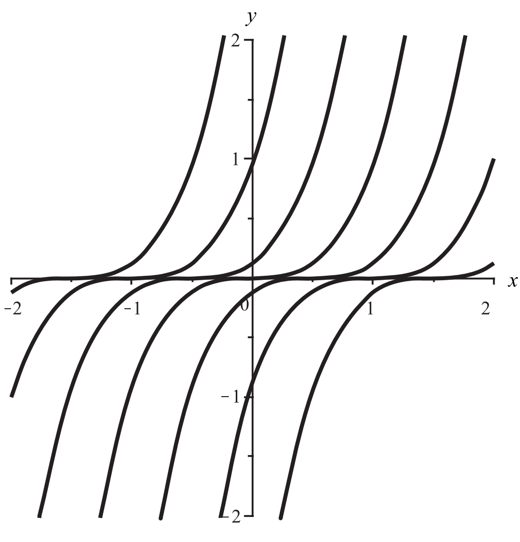

Рис. 1.3. Нарушение единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения